Opción A

Ejercicio 1 opción A, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2a\cos(x) & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$ es continua.

a) [1'5 puntos] Determina a y b.
b) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f.

Solución

Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2a\cdot\cos(x) & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$ es continua.

a)
Determina a y b.

Como nos dicen que es continua en R, lo es también en $x = 0$ y $x = \pi$.

Como f es continua en $x = 0$ tenemos: $f(0) = \lim_{x\to 0^-} [f(x)] = \lim_{x\to 0^+} [f(x)]$
$f(0) = \lim_{x\to 0^+} [f(x)] = \lim_{x\to 0} [\, x^2 + 2a\cdot\cos(x) \,] = (0 + 2a\cdot\cos(0)\,) = 2a.$
$\lim_{x\to 0^-} [f(x)] = \lim_{x\to 0^-} [\, 3x + 2 \,] = (0 + 2) = 2$. Igualando tenemos $2a = 2$, de donde **$a = 1$**.

Como f es continua en $x = \pi$ tenemos: $f(\pi) = \lim_{x\to \pi^-} [f(x)] = \lim_{x\to \pi^+} [f(x)]$
$f(\pi) = \lim_{x\to \pi^+} [f(x)] = \lim_{x\to \pi} [\, ax^2 + b \,] = (1.\, \pi^2 + b\,) = \pi^2 + b.$
$\lim_{x\to \pi^-} [f(x)] = \lim_{x\to \pi^-} [x^2 + 2a\cdot\cos(x)] = (\pi^2 + 2\cdot 1\cdot\cos(\pi)\,) = \pi^2 - 2$. Igualando tenemos $\pi^2 + b = \pi^2 - 2$, de donde **$b = -2$**.
Los valores pedidos son $a = 1$ y $b = -2$.
b)
Estudia la derivabilidad de f.

Las ramas $3x + 2$, $x^2 + 2\cos(x)$ y $x^2 – 2$ son derivables en todo R, por lo tanto lo son en el intervalo abierto donde están definidas. Sólo nos falta ver la derivabilidad de f en $x = 0$ y $x = \pi$.

$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2\cdot\cos(x) & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 2\cdot\text{sen}(x) & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ 2x & \text{si} \quad x > \pi \end{cases}$

Vamos a utilizar la continuidad de la derivada que es más rápido

Para que f sea derivable en $x = 0$ se tiene que verificar: $f'(0^-) = f'(0^+)$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} [f'(x)] = \lim_{x\to 0^-} [3] = 3.$
$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} [\, f'(x)] = \lim_{x\to 0^+} [2x – 2\text{sen}(x)\,] = 0 – 2\text{sen}(0) = 0$. Como $f'(0^-) = 3 \ne f'(0^+) = 0$, **la función f no es derivable en $x = 0$.**

Para que f sea derivable en $x = \pi$ se tiene que verificar: $f'(\pi^-) = f'(\pi^+)$

$f'(\pi^-) = = \lim_{x\to \pi^-} [f'(x)] = = \lim_{x\to \pi^-} [2x – 2\text{sen}(x)] = (2\pi – 2\text{sen}(\pi)) = 2\pi.$
$f'(\pi^+) = \lim_{x\to \pi^+} [\, f'(x)] = \lim_{x\to \pi^+} [2x] = 2\pi$. Como $f'(\pi^-) = f'(\pi^+) = 2\pi$, **la función f si es derivable en $x = \pi$, por tanto f es derivable en R – {0}, y su derivada es:** $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 2\cdot\text{sen}(x) & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ 2x & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$.

Ejercicio 2 opción A, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

Considera la función dada por $f(x) = \sqrt{3 + |x|}$ para $x \in [-3,3]$.
a) [0'5 puntos] Expresa la función *f* definida a trozos.
b) [2 puntos] Halla $\int_{-3}^{3} f(x)dx$.

Solución

Considera la función dada por $f(x) = \sqrt{3 + |x|}$ para $x \in [-3,3]$.

a)

Expresa la función *f* definida a trozos.

Sabemos que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ +x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, por tanto $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \sqrt{3+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

b)

Halla $\int_{-3}^{3} f(x)dx$.

Como $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \sqrt{3+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$, vamos a calcular la integral indefinida de cada rama por separado, y después las juntaremos en la integral definida que me piden.

Ambas integrales son integrales por cambio, en la primera $3 - x = t^2$ y en la segunda $3 + x = t^2$, después quitaremos el cambio.

$$I_1 = \int \sqrt{3-x}\cdot dx = \left\{ \begin{matrix} 3-x = t^2 \\ x = 3 - t^2 \\ dx = -2tdt \end{matrix} \right\} = \int \sqrt{t^2}\cdot(-2t)dt = -2\int t^2\cdot dt = -\frac{2t^3}{3} = \left\{ \begin{matrix} \text{Quito} \\ \text{cambio} \end{matrix} \right\} = -\frac{2\left(\sqrt{3-x}\right)^3}{3} = -\frac{2\sqrt{(3-x)^3}}{3}$$

$$I_2 = \int \sqrt{3+x}\cdot dx = \left\{ \begin{matrix} 3+x = t^2 \\ x = t^2 - 3 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right\} = \int \sqrt{t^2}\cdot(2t)dt = 2\int t^2\cdot dt = \frac{2t^3}{3} = \left\{ \begin{matrix} \text{Quito} \\ \text{cambio} \end{matrix} \right\} = \frac{2\left(\sqrt{3+x}\right)^3}{3} = \frac{2\sqrt{(3+x)^3}}{3}$$

La integral pedida es $\int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{0}\sqrt{3-x}\cdot dx + \int_{0}^{3}\sqrt{3+x}\cdot dx =$

$$= \left[-\frac{2\sqrt{(3-x)^3}}{3}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{2\sqrt{(3+x)^3}}{3}\right]_{0}^{3} = \left[\left(-\frac{2\sqrt{(3-0)^3}}{3}\right) - \left(-\frac{2\sqrt{(3-(-3))^3}}{3}\right)\right] + \left[\left(\frac{2\sqrt{(3+3)^3}}{3}\right) - \left(\frac{2\sqrt{(3+0)^3}}{3}\right)\right] =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3^3}}{3} + \frac{2\sqrt{6^3}}{3} + \frac{2\sqrt{6^3}}{3} - \frac{2\sqrt{3^3}}{3} = \frac{4\sqrt{6^3}}{3} - \frac{4\sqrt{3^3}}{3} = 8\sqrt{6} - 4\sqrt{3}$$

Ejercicio 3 opción A, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) [1'25 puntos] Calcula la matriz inversa de (A + B).

b) [1'25 puntos] Calcula el determinante de $2A^{-1}(A + B)^t$, siendo $(A + B)^t$ la matriz traspuesta de A + B.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de (A + B).

Llamamos $C = A + B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz C = A + B tiene inversa si det(C) = $= |C| \neq 0$

Como $\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix}$ $= -1(0-20) + 2\cdot(2-0) = 24 \neq 0$, existe la matriz inversa

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t).$$

Calculamos $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t)$. $|C| = 24$; $C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t) = \frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/12 & 1/6 & 5/24 \\ 5/6 & -1/3 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 & -1/24 \end{pmatrix} = (A + B)^{-1}$.

b)
Calcula el determinante de $2A^{-1}(A + B)^t$, siendo $(A + B)^t$ la matriz traspuesta de A + B.

De las propiedades de los determinantes, sabemos que $\det(C^T) = \det(C)$, y $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
También sabemos que $\det(k\cdot A) = k^n\cdot\det(A)$, siendo "n" el orden de la matriz A, en este caso "3".

Calculamos $\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(1)\cdot(-2) = 4$, puesto que en una matriz triangular su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$\det(2A^{-1}(A + B)^t$ = $\det(2A^{-1})\cdot\det(A + B)^t = 2^3\cdot\det(A^{-1})\cdot\det(A + B)^t = [2^3/\det(A)]\cdot\det(C)^t = [2^3/(\det(A))]\cdot\det(C) =$
$= [8/(4)]\cdot 24$ **$= 2\cdot 24 = 48$.**

Ejercicio 4 opción A, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

Considera los vectores **u** = (2,3,4), **v** = (-1,-1,-1) y **w** = (-1,λ,-5) siendo λ un número real.
a) [1'25 puntos] Halla los valores de λ para los que el paralelepípedo determinado por **u**, **v** y **w** tiene volumen 6 unidades cúbicas.
b) [1'25 puntos] Determina el valor de λ para el que **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes.

Solución

Considera los vectores **u** = (2,3,4), **v** = (-1,-1,-1) y **w** = (-1,λ,-5) siendo λ un número real.
a)
Halla los valores de λ para los que el paralelepípedo determinado por **u**, **v** y **w** tiene volumen 6 unidades cúbicas.

Sabemos que el volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **u**, **v** y **w**, es el valor absoluto (lo notaremos **| |**) del producto mixto (lo notaremos con corchetes [ ]) de los tres vectores **u**, **v** y **w**.

Tenemos, volumen = 6 = **|** [**u**, **v** y **w**] **|** = |det(**u**,**v**,**w**)| = $\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix}\begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \\ C_3 - C_1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{matrix}\right| =$

$= |-(-1)\cdot(-4 - 2\lambda - 2)| = |-6 - 2\lambda|$.

Tenemos la ecuación $|-6 - 2\lambda| = 6$, que no da lugar a dos ecuaciones:
$+(-6 - 2\lambda) = 6$ y $-(-6 - 2\lambda) = 6$.

De $-6 - 2\lambda = 6 \rightarrow -12 = 2\lambda$, luego **$\lambda = -6$.**
De $6 - 2\lambda = 6 \rightarrow 0 = 2\lambda$, luego **$\lambda = 0$.**

Luego los valores de λ para los que el paralelepípedo determinado por u, v y w tiene volumen 6 unidades cúbicas son $\lambda = -6$ y $\lambda = 0$.
b)
Determina el valor de λ para el que **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes.

Los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes si y solo si det(**u**,**v**,**w**) = 0

det(**u**,**v**,**w**) = 0 = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix}\begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \\ C_3 - C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{matrix} = -(-1)\cdot(-4 - 2\lambda - 2) = -6 - 2\lambda = 0.$

De $-6 - 2\lambda = 0$, tenemos **$\lambda = -3$, es decir para $\lambda = -3$ los vectores u, v y w son linealmente dependientes.**

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right)$.

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}(x) - x\cdot\cos(x)}{x\cdot\text{sen}(x)}\right) = \frac{\text{sen}(0) - 0\cdot\cos(0)}{0\cdot\text{sen}(0)} = \frac{0}{0}$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H). (Si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a - δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos ∞/∞, y si x→∞), con lo cual tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}(x)-x\cdot\cos(x)}{x\cdot\text{sen}(x)}\right)=\left\{\frac{0}{0};L'H\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-(1\cdot\cos(x)+x\cdot(-\text{sen}(x))}{1\cdot\text{sen}(x)+x\cdot\cos(x)}\right)=\{\text{Opero}\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot\text{sen}(x)}{1\cdot\text{sen}(x)+x\cdot\cos(x)}\right)=$$

$$=\left\{\frac{0}{0};L'H\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1\cdot\text{sen}(x)+x\cdot\cos(x)}{\cos(x)+1\cdot\cos(x)+x\cdot(-\text{sen}(x))}\right)=\frac{\text{sen}(0)+0\cdot\cos(0)}{\cos(0)+1\cdot\cos(0)+0\cdot(-\text{sen}(0))}=\frac{0+0}{1+1+0}=\frac{0}{2}=0.$$

Ejercicio 2 opción B, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

[2'5 puntos] Sea f : R → R la función definida por f(x) = x·arctan(x). Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0,π).

Solución

Calculamos primero la integral indefinida, es decir una primitiva F de f.

$F(x)=\int x\cdot\text{artg}(x)dx$, vemos que es una integral por partes ($\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$)

$$F(x)=\int x\cdot\text{artg}(x)dx=\left\{\begin{array}{l}u=\text{artg}(x)\Rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ dv=xdx\Rightarrow v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\}=\text{artg}(x)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\cdot\text{artg}(x)-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\cdot\text{artg}(x)-\frac{1}{2}\cdot I_1$$

$$I_1=\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\int\frac{1+x^2-1dx}{1+x^2}=\int\frac{1+x^2dx}{1+x^2}-\int\frac{1dx}{1+x^2}=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\text{artg}(x)$$

Luego

$F(x)=\int x\cdot\text{artg}(x)dx=\frac{x^2}{2}\cdot\text{artg}(x)-\frac{1}{2}\cdot I_1=\frac{x^2}{2}\cdot\text{artg}(x)-\frac{1}{2}\cdot(x-\text{artg}(x))+K=\frac{x^2}{2}\cdot\text{artg}(x)+\frac{1}{2}\cdot\text{artg}(x)-\frac{1}{2}x+K$, es decir $F(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\text{artg}(x)+\frac{1}{2}\cdot\text{artg}(x)-\frac{1}{2}x+K$.

La primitiva F(x) que pasa por el punto (0,π), verifica F(0) = π, en nuestro caso:

$F(0)=\frac{0^2}{2}\cdot\text{artg}(0)+\frac{1}{2}\cdot\text{artg}(0)-\frac{1}{2}(0)+K=\pi$, es decir K = π, y la primitiva pedida es:

$F(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\text{artg}(x)+\frac{1}{2}\cdot\text{artg}(x)-\frac{1}{2}x+\pi.$

Ejercicio 3 opción B, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

[2'5 puntos] Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$. Determina, si existe, la matriz X que verifica que ABX − 2C = CX.

Solución

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$. Determina, si existe, la matriz X que verifica que ABX − 2C = CX.

De ABX − 2C = CX, tenemos ABX − CX = 2C, luego (AB – C)·X = 2C.

En principio la operación matricial (AB – C)·X = 2C tiene sentido.

Llamamos $D = AB - C = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1&3\\8&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2&3\\9&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$.

La ecuación (AB – C)·X = 2C, se reduce a D·X = 2C.

Como $\det(D) = |D| = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= +1(-4+3) = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa $D^{-1} = \frac{1}{|D|}\cdot Adj(D^t)$.

Calculamos $D^{-1} = \frac{1}{|D|}\cdot Adj(D^t)$. $|D| = -1$; $D^t = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(D^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa

es $D^{-1} = \frac{1}{|D|}\cdot Adj(D^t) = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$.

Como existe la matriz inversa D^{-1}, multiplicando por la izquierda la expresión $D\cdot X = 2C$, tenemos
$D^{-1}\cdot D\cdot X = D^{-1}\cdot 2C \rightarrow I\cdot X = 2D^{-1}C \rightarrow X = 2D^{-1}C$

La matriz pedida es $\mathbf{X = 2D^{-1}\cdot C =}\ 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -20 & 19 & -12 \\ -15 & 15 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 opción B, Suplente Junio 2017 (modelo 4)

Sea r la recta que pasa por A(4,3,6) y B(−2,0,0) y sea s la recta dada por $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \quad\ \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$.

a) [1'25 puntos] Determina la posición relativa de r y s.
b) [1'25 puntos] Calcula, si existen, los puntos C de s tales que los vectores **CA** y **CB** son ortogonales.

Solución

Sea r la recta que pasa por A(4,3,6) y B(-2,0,0) y sea s la recta dada por $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \quad\ \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$.

a)
Determina la posición relativa de r y s.

De la recta "r" tomamos un punto, el B(-2,0,0) y un vector director, el **BA** = (6,3,6), otro es el **u** = (2,1,2).
Un punto D de "s" es D(2,0,1) y un vector director es **v** = (1,1,-2).

Como los vectores **u** de "r" y **v** de "s" no son proporcionales, las recta "r" y "s" se cortan o se cruzan.

Si det(**BD**, **u**, **v**) = 0, "r" y "s" se cortan, con **BD** = **d** – **b** = (4,0,1)
Si det(**BD**, **u**, **v**) ≠ 0, "r" y "s" se cruzan.

Como det(**BD**, **u**, **v**) $= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} F_2 - F_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= -(1)\cdot(16-1) = -15 \neq 0$, **"r" y "s" se cruzan**

b)
Calcula, si existen, los puntos C de "s" tales que los vectores **CA** y **CB** son ortogonales.

De la recta s(D;**v**) tomamos un punto genérico C(x,y,z) = C(2+λ, λ, 1-2λ).

CA = a - c = (4-2-λ , 3-λ , 6-1+2λ) = (2-λ , 3-λ , 5+2λ)
CB = b - c = (-2-2-λ , 0-λ , 0-1+2λ) = (-4-λ , -λ , -1+2λ)

CA y **CB** son ortogonales si y solo si su producto escalar (•) es cero.
CA• CB = 0 = $(2-\lambda, 3-\lambda, 5+2\lambda)\bullet(-4-\lambda, -\lambda, -1+2\lambda) = (2-\lambda)\cdot(-4-\lambda) + (3-\lambda)\cdot(-\lambda) + (5+2\lambda)\cdot(-1+2\lambda) =$
$= \lambda^2 + 2\lambda - 8 + \lambda^2 - 3\lambda + 4\lambda^2 + 8\lambda - 5 = 6\lambda^2 + 7\lambda - 13 = 0.$

$\lambda = \frac{-7 \pm \sqrt{49+312}}{12} = \frac{-7 \pm 19}{12}$, de donde $\boldsymbol{\lambda = 1}$ y $\boldsymbol{\lambda = -13/6}$.

CA y CB son ortogonales tomando $\lambda = 1$ y $\lambda = -13/6$.